受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち１）

1

得点	

（１）	$x^2-(a+2)x+2a<0$ を解くと　$(x-a)(x-2)<0$ から $\left.\begin{array}{ll} a<2 \text{ のとき} & a<x<2 \\ a=2 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ a>2 \text{ のとき} & 2<x<a \end{array}\right\}\cdots\cdots①$ $2x^2-x-3>0$ を解くと　$(2x-3)(x+1)>0$ から $x<-1,\ \dfrac{3}{2}<x$　$\cdots\cdots②$ ①，②を同時に満たす整数がただ１つ存在するのは $a<2$ または $a>2$ のときである。 （ｉ）$a<2$ のときただ１つの整数 x は　$x=-2$　よって　$-3\leqq a<-2$ （ⅱ）$a>2$ のときただ１つの整数 x は　$x=3$　よって　$3<a\leqq 4$ （ｉ）（ⅱ）より　求める a の値の範囲は　$-3\leqq a<-2$，$3<a\leqq 4$
（２）	箱 A，B，C を選ぶという事象をそれぞれ A，B，C とし，赤玉を取り出すという事象を R とする。 $P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)+P(C\cap R)$ $=P(A)P_A(R)+P(B)P_B(R)+P(C)P_C(R)$ $=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{8}=\dfrac{53}{126}$ $P(A\cap R)=P(A)P_A(R)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{9}$ よって，求める確率は　$P_R(A)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{1}{9}\div\dfrac{53}{126}=\dfrac{14}{53}$

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち２）

$\boxed{1}$　（続き）

（３）	平面に垂直なベクトルの一つは（1，2，1）であるから 対称点の座標は（$3+t$，$-4+2t$，$5+t$）とおける。 中点が平面上にあるので, $\dfrac{3+(3+t)}{2}+2\cdot\dfrac{-4+(-4+2t)}{2}+\dfrac{5+(5+t)}{2}-10=0$ これより，$t=\dfrac{10}{3}$　　よって　対称点の座標は（$\dfrac{19}{3}$，$\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{25}{3}$）

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち３）

2

得点	

（１）	点 C を通り AD に平行な直線と BA を延長した直線との 交点を E とする。 AD//EC より ∠AEC＝∠BAD(平行線の同位角) ∠DAC＝∠ACE(平行線の錯角) また，仮定より ∠BAD＝∠DAC なので, ∠AEC＝∠ACE となり, △AEC は，AE＝AC の二等辺三角形となる・・・① ところで，△BCE において，AD//EC から BA : AE＝BD : DC ①　より BA : AC＝BD : DC よって AB : AC＝BD : DC

（２）

（ア）	$CD = x$ とすると (1)より　$16:12 = (14 - x):x$ $x = 6$ $CD = 6$

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち４）

2　（続き）

（２）

（イ）	$\mathrm{CH}=y$ とすると 三平方の定理より $\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2$ なので $12^2-y^2=16^2-(14-y)^2$ $y=3$ $\mathrm{AH}^2=12^2-3^2$ となるから $\mathrm{AH}=\pm 3\sqrt{15}$ $\mathrm{AH}>0$ より $\mathrm{AH}=3\sqrt{15}$
（ウ）	（ア），（イ）より△ADC の面積は， $6\times 3\sqrt{15}\div 2=9\sqrt{15}$ となる。 また，$\mathrm{DH}=\mathrm{CH}=3, \mathrm{AH}\perp\mathrm{CD}$ より △ADC は，$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形といえる・・・（＊） ところで，△ADC と△ABP において， $\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{BAP}$（仮定） $\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{APB}$（弧 AB の円周角） ２組の角がそれぞれ等しいから $\triangle\mathrm{ADC}\backsim\triangle\mathrm{ABP}$ また，２つの三角形の面積比は，相似比の２乗の比に等しいから △ABP の面積を S とすると， $\mathrm{AD}^2:\mathrm{AB}^2=9\sqrt{15}:S$ （＊）より　$\mathrm{AC}^2:\mathrm{AB}^2=9\sqrt{15}:S$ $12^2:16^2=9\sqrt{15}:S$ よって　$S=16\sqrt{15}$

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち５）

3

得点	

（１）

$1 \leqq x \leqq e$ より，$1 \leqq t \leqq e$ において

$$|\log t - \log x| = \begin{cases} -\log t + \log x & (1 \leqq t < x) \\ \log t - \log x & (x \leqq \mathrm{t} \leqq \mathrm{e}) \end{cases}$$

である。ゆえに，

$$f(x) = \int_1^e |\log t - \log x| dt$$
$$= \int_1^x (-\log t + \log x)dt + \int_x^e (\log t - \log x)dt$$
$$= \left[-t\log t + t + t\log x\right]_1^x + \left[t\log t - t - t\log x\right]_x^e$$
$$= 2x - (e+1)\log x - 1$$

（２）

（１）より，$f(x) = 2x - (1+e)\log x - 1$ なので，

$$f'(x) = \frac{2x-(e+1)}{x}$$ となる。

$f'(x) = 0$ を解くと，$x = \dfrac{e+1}{2}$ であり，$2.7 < e < 2.8$ より，$1.85 < \dfrac{e+1}{2} < 1.9$ なので

増減表は

x	1	$\cdots$	$\dfrac{e+1}{2}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(e)$

となる。$f(1) = 1$，$f\left(\dfrac{e+1}{2}\right) = e - (e+1)\log\dfrac{e+1}{2}$，$f(e) = e - 2$ であり，

$2.7 < e < 2.8$ より，$0.7 < e - 2 < 0.8$ なので，

$x = 1$ のとき最大値 1，$x = \dfrac{e+1}{2}$ のとき最小値 $e - (e+1)\log\dfrac{e+1}{2}$

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち６）

4

得点	

（１）	$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ となる。 $z_2-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\left(z_1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ より $z_2=\frac{(\sqrt{3}-2)+i}{2}$ $z_3-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\left(z_2-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ より $z_3=0$
（２）	z_n の定義より $z_{n+1}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\left(z_n-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ 　となる。 $z_1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=i-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 　より 数列 $\left\{z_n-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right\}$ は初項 $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$，公比 $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ 　の等比数列となるので $z_n-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{n-1}$ よって，$z_n=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{n-1}+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

受験番号	

平成28年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（７枚のうち７）

4　（続き）

（３）	ドモアブルの定理より $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{n-1}=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{n-1}=\cos\dfrac{(n-1)\pi}{6}+i\sin\dfrac{(n-1)\pi}{6}$ なので， $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{n-1}=\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)\times\left\{\cos\dfrac{(n-1)\pi}{6}+i\sin\dfrac{(n-1)\pi}{6}\right\}$ $=\cos\dfrac{(n+4)\pi}{6}+i\sin\dfrac{(n+4)\pi}{6}$ ゆえに， $z_n=\left\{\cos\dfrac{(n+4)\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}+i\left\{\sin\dfrac{(n+4)\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\right\}$ これが，実数となればよいので $\sin\dfrac{(n+4)\pi}{6}+\dfrac{1}{2}=0$ となればよい。 $\dfrac{(n+4)\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi, \dfrac{11}{6}\pi+2k\pi$　（ただし，k は整数） n は自然数なので， $n=12k+3, 12k+7$　（ただし，k は０以上の整数）