

高等学校 数学

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

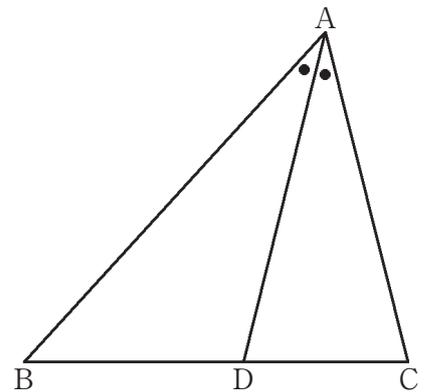
1 次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。 x についての2つの不等式 $x^2 - (a + 2)x + 2a < 0$, $2x^2 - x - 3 > 0$ を同時に満たす整数がただ1つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) A の箱には赤玉2個, 白玉4個が入っている。B の箱には赤玉3個, 白玉4個が入っている。C の箱には赤玉4個, 白玉4個が入っている。無作為に1つの箱を選び, 玉を1つ取り出す。取り出した玉が赤玉であるときに, それが箱 A から取り出された確率を求めよ。ただし, どの箱を選ぶか, どの玉を選ぶかは同様に確からしいとする。

(3) 点 $(3, -4, 5)$ の平面 $x + 2y + z - 10 = 0$ に関する対称点の座標を求めよ。

2 右図のように, $\triangle ABC$ において, $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。次の (1), (2) の問いに答えよ。



(1) $AB : AC = BD : DC$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $AB = 16$, $BC = 14$, $CA = 12$ とするとき, 次の (ア) ~ (ウ) の問いに答えよ。

(ア) CD の長さを求めよ。

(イ) 点 A から BC へ下ろした垂線と BC との交点を H とするとき, AH の長さを求めよ。

(ウ) $\triangle ABC$ の外接円と AD の延長線との交点のうち, A でない交点を P とするときの $\triangle ABP$ の面積を求めよ。

3 $1 \leq x \leq e$ とする。関数 $f(x) = \int_1^e |\log t - \log x| dt$ とする。このとき、次の (1), (2) の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数を表し、 e は自然対数の底とする。また、必要ならば $2.7 < e < 2.8$ を用いてもよい。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの x の値も求めよ。

4 自然数 n に対して、複素数平面上の点 z_n を次のように定める。

(i) $z_1 = i$

(ii) $n \geq 1$ のとき、点 z_{n+1} は点 z_n を点 $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ を中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた点とする。

このとき、次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) z_2, z_3 を求めよ。

(2) z_n を n を用いて表せ。

(3) 点 z_n が実軸上にあるような自然数 n をすべて求めよ。