

受験番号	
------	--

平成29年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (2枚のうち1)

4

得点	
----	--

(1)

$$f(x) = xe^{-x} \text{ より}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = -(x-1)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (x-1)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

$$f'''(x) = e^{-x} - (x-2)e^{-x} = -(x-3)e^{-x}$$

(2)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x} \cdots (i) \text{ と類推される。}$$

[1] $n=1$ のとき $f'(x) = -(x-1)e^{-x}$ となり (i) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (i) が成り立つと仮定すると

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k(x-k)e^{-x}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \{(-1)^k(x-k)e^{-x}\}' \\ &= (-1)^k \{e^{-x} - (x-k)e^{-x}\} \\ &= (-1)^k \times (-1) \times (x-k-1)e^{-x} \\ &= (-1)^{k+1} \{x-(k+1)\}e^{-x} \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときも (i) が成り立つ。

[1], [2] より (i) は、すべての自然数 n について成り立つ。

高等学校 数学 解答用紙 (2枚のうち2)

4 (続き)

(3)

①	<p>$f^{(n)}(x_n) = (-1)^n (x_n - n)e^{-x_n} = 0$ より, $x_n = n$ となる。</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ <p>$2 < e < 3$ より, $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ となる。</p> <p>よって $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$</p>
---	--

②	$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ke^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^k}$ <p>ここで, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^k}$ とおくと $S_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n} \dots$ (ii)</p> $\frac{1}{e} S_n = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \dots + \frac{n-1}{e^n} + \frac{n}{e^{n+1}} \dots$ (iii) <p>(ii) - (iii) から</p> $\left(1 - \frac{1}{e}\right) S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n} - \frac{n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}} \right) - \frac{n}{e^{n+1}}$ $= \frac{1}{e-1} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) - \frac{n}{e^{n+1}}$ となるので $S_n = \frac{e}{(e-1)^2} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) - \frac{1}{e-1} \frac{n}{e^n}$ <p>$2 < e < 3$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ だから</p> $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$
---	---

