

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3	得点	
---	----	--

〔1〕(1)

l_a の方程式は $y = 2ax - a^2$

l_a と m_a のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2a$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2a}$$

また、 n_a と x 軸の正の向きのなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ なので n_a の傾きは

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} = \frac{1 - \frac{1}{4a^2}}{\frac{1}{a}} = \frac{4a^2 - 1}{4a}$$

よって、 n_a の方程式は $y - a^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}(x - a)$ より

$$y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

この式は $x = 0$ のとき $y = \frac{1}{4}$ なので、直線は定点 $(0, \frac{1}{4})$ を通る。

(2)

x の2次方程式 $x^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$ を解くと

$$4ax^2 - (4a^2 - 1)x - a = 0$$

$$(4ax + 1)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4a}, a$$

よって、求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{4a}}^a \left(\frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4} - x^2 \right) dx = - \int_{-\frac{1}{4a}}^a \left(x + \frac{1}{4a} \right) (x - a) dx$$

$$= \frac{\left\{ a - \left(-\frac{1}{4a} \right) \right\}^3}{6} = \frac{\left(a + \frac{1}{4a} \right)^3}{6} \geq \frac{\left(2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} \right)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

($\because a > 0$ かつ $\frac{1}{4a} > 0$ より相加平均・相乗平均の関係を用いると $a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1$)

等号成立は $a = \frac{1}{4a}$ すなわち、 $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ のとき。

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき面積は最小値 $\frac{1}{6}$ をとる。

受験番号	
------	--

2020年度大阪府・大阪市・堺市・豊能地区公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

3 (続き)

[2]

$\triangle ABC$ について辺 AB , 辺 BC , 辺 CA の長さをそれぞれ c, a, b とおく。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because \sin A \geq 0)$$

$$= \frac{1}{2}bc \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$$

$$= \frac{1}{2}bc \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} \quad (\because \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$$

$$= \frac{1}{2}bc \sqrt{\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\right) \left(\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(b+c)+a}{2}\right) \left(\frac{(b+c)-a}{2}\right) \left(\frac{a-(b-c)}{2}\right) \left(\frac{a+(b-c)}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{-a+b+c}{2}\right) \left(\frac{a-b+c}{2}\right) \left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

/

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4

得点	
----	--

(1)

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} (\because \text{無限級数の和 } S \text{ が存在する})$$

$$= S - S$$

$$= 0$$

/

(2)

つねに和が存在するとは限らない。反例として、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるが $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ は発散する。

なぜなら x の関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は単調減少関数より $k > 0$ について

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} f(x) dx > \frac{1}{k+1}$$

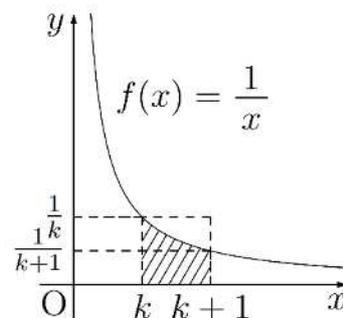
$$\therefore \frac{1}{k} > \log(k+1) - \log k$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k)$$

$$\text{すなわち } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

$$\text{また } \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = \infty$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \infty$$



/

受験番号

2020年度大阪府・大阪市・堺市・豊能地区公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること)

4 (続き)

(3)

与えられた無限級数の初項から第 n 項までの部分和を

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ とおく。}$$

任意の自然数 n に対して、 $S_{2n-1} = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1$

$$\text{また } S_{2n} = 1 - \frac{2n}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{(2n+1) - 1}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

よって与えられた無限級数の和は存在し、和は1である。

/