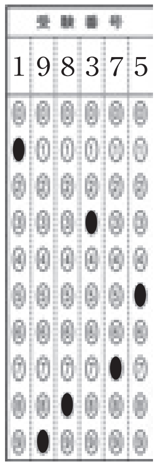
平成29年度大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1



記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

受験番号	*1 9 8 3 7 5*

解答についての注意点

1　解答用紙は、マーク式解答用紙と記述式解答用紙の 2 種類があります。

2　大問 $\boxed{1}$ ～大問 $\boxed{3}$ については、マーク式解答用紙に、
大問 $\boxed{4}$ については、記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら、まずマーク式解答用紙に氏名を記入し、受験番号を右の記入例に従って、鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は、全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

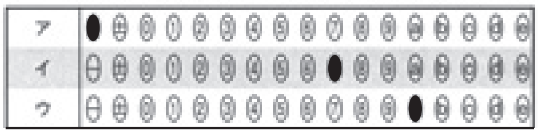
4　大問 $\boxed{1}$ ～大問 $\boxed{3}$ については、次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は、マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは、消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示のないかぎり、符号（－、±）、数字（0～9）、又は文字（a～e）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-7a$ と答えたいとき



なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ などが 2 度以上現れる場合、2 度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また、それ以上約分できない形で答えてください。

例えば、$\dfrac{3}{4}$ 、$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを、$\dfrac{6}{8}$ 、$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。また、必要に応じて、指定された桁まで ⓪ にマークをしてください。

例えば、$\boxed{\text{キ}}$. $\boxed{\text{クケ}}$ に 2.9 と答えたいときは、2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば、$4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ 、$6\sqrt{2a}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ 、$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

5　その他、係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

$\boxed{1}$

(1) $x^2-6y^2+xy+5x+5y+6$ を因数分解すると $(x-\boxed{ア}\,y+\boxed{イ})(x+\boxed{ウ}\,y+\boxed{エ})$ となる。また，$x^2-6y^2+xy+5x+5y+9=0$ を満たす整数の組 (x, y) のうち x の値が最も小さくなるのは $(x, y)=(\boxed{オカ}, \boxed{キ})$ である。

(2) △ABC において，AB = 5，BC = 8，∠ABC = 60° とする。このとき，AC = $\boxed{ク}$ である。また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ である。

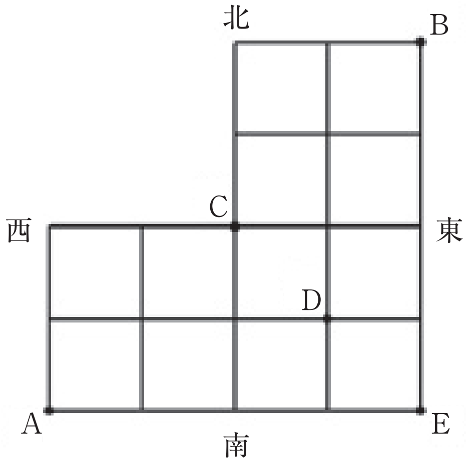
(3) 実数 x，y に関する条件 p，q を次のように定める。ただし，a は正の定数とする。

p : $x^2+y^2 \leqq a$

q : $|x+y| \leqq 1$ かつ $|x-y| \leqq 1$

命題「 p ならば q である」が真となるための a の値の範囲は $0 < a \leqq \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

(4) 右図のような道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点と呼び，隣り合う交差点間の道の長さはすべて等しいものとする。



① A 地点から C 地点を通り B 地点へ最短距離で到達する経路は $\boxed{セソ}$ 通りある。また，A 地点から B 地点へ最短距離で到達する経路は $\boxed{タチ}$ 通りある。

② 点 P が A 地点から B 地点へ次のようにして進む。

点 P は東方向か北方向のいずれかの方向にしか進めない。また，交差点において，東方向か北方向のいずれか一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進み，両方に進めるときはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で東方向か北方向に進む。例えば，E 地点においては確率 1 で北方向に進み，C 地点，D 地点においてはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で東方向か北方向に進む。

このとき，A 地点から D 地点を通り B 地点へ到達する確率は $\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ であり，A 地点から C 地点を通り B 地点へ到達する確率は $\frac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}$ である。

また，点 Q が B 地点から A 地点へ次のようにして進む。

点 Q は西方向か南方向のいずれかの方向にしか進めない。また，交差点において，西方向か南方向のいずれか一方にしか進めないときは確率 1 でその方向に進み，両方に進めるときはそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で西方向か南方向に進む。

点 P が A 地点から，点 Q が B 地点からそれぞれ同時に出発するとき，点 P と点 Q が出会う確率は $\frac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハヒフ}}$ である。ただし，点 P の進む速さと点 Q の進む速さは同じであり，点 P と点 Q はそれぞれ一定の速さで静止することなく進むものとする。

$\boxed{2}$

(1) 次の表は，あるクラスの生徒 10 人に対して，20 点満点のテストを 2 回行い，その得点をまとめたものである。ただし，テストの得点は整数値である。

	1 回目	2 回目
生徒 1	4	8
生徒 2	7	15
生徒 3	5	9
生徒 4	15	16
生徒 5	2	A
生徒 6	11	12
生徒 7	6	6
生徒 8	8	14
生徒 9	18	B
生徒 10	14	18

1 回目のテストについて，平均値は $\boxed{\text{ア}}$ 点であり，中央値は $\boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

2 回目のテストについて，平均値は 12 点，分散は 16 である。このとき，$A < B$ とすると，生徒 5 の 2 回目のテストの得点 A は $\boxed{\text{カ}}$ 点であり，生徒 9 の 2 回目のテストの得点 B は $\boxed{\text{キク}}$ 点である。

また，1 回目と 2 回目のテストの得点をそれぞれ 5 倍して 100 点満点に換算した。このとき，1 回目のテストについて，元の得点と換算後の得点との相関係数は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，1 回目のテストの換算後の得点と 2 回目のテストの換算後の得点との相関係数は $\boxed{\text{コ}}.\boxed{\text{サシ}}$ である。

(2) 放物線 $C : y = 4x^2$ と直線 $l : y = 4x + 3$ がある。放物線 C と直線 l との交点をそれぞれ A，B とする。ただし，点 A の x 座標は点 B の x 座標より小さい。このとき，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$ である。放物線 C 上の点で，x 座標が -1 となる点を P とする。点 P を通り△PAB の面積を 2 等分する直線の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

$\boxed{3}$

(1) 曲線 C : $y=|x^2-2x|$ と直線 l : $y=mx$ がある。ただし，$m>0$ とする。

曲線 C について，$x \leqq \boxed{ア}$，$\boxed{イ} \leqq x$ のとき $y=x^2-2x$ となり，$\boxed{ア}<x<\boxed{イ}$ のとき $y=-x^2+2x$ となる。

曲線 C と直線 l が異なる3つの共有点をもつ条件は $\boxed{ウ}<m<\boxed{エ}$ である。このとき，曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積の和を S とすると

$$S=-\frac{1}{6}\left(m^3-\boxed{オカ}\,m^2+\boxed{キク}\,m-\boxed{ケ}\right)$$

であるから，S は $m=\boxed{コ}-\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}$ のとき，最小値 $\dfrac{8}{3}\left(\boxed{スセ}-\boxed{ソタ}\sqrt{\boxed{チ}}\right)$ をとる。

(2) 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OAの中点をD，辺OBを2：1に内分する点をE，辺OCを a：$(1-a)$ に内分する点をFとする。ただし，$0<a<1$ とする。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。$\overrightarrow{EF}=\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{OB}+\boxed{ヌ}\,\overrightarrow{OC}$ となり，$\left|\overrightarrow{EF}\right|$ は $a=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ のとき最小値をとる。

$a=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ のとき，△DEFの重心をG，直線OGと平面ABCとの交点をHとすると，$\mathrm{OG}=\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}\mathrm{OH}$ である。

4

関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の（1）～（3）の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とし，$2 < e < 3$ を用いてもよい。

(1) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とする。(1) の結果より，$f^{(n)}(x)$ を類推し，それが正しいことを証明せよ。ただし，n は自然数とする。

(3) 任意の自然数 n に対して，$f^{(n)}(x) = 0$ を満たす x の値を x_n とする。このとき，次の①，②の問いに答えよ。

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{n}$ を求めよ。

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてもよい。

【 計算用紙 】

（必要に応じて使用すること）