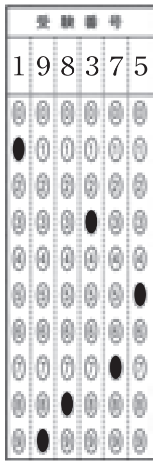
平成30年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1



記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

受験番号	*198375*

解答についての注意点

1　解答用紙は，マーク式解答用紙と記述式解答用紙の2種類があります。

2　大問 1 ～大問 3 については，マーク式解答用紙に，
大問 4 については，記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら，まずマーク式解答用紙に氏名を記入し，受験番号を右の記入例に従って，鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は，全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

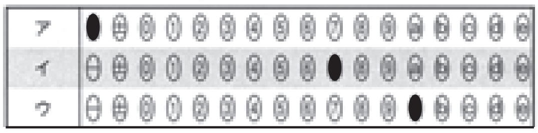
4　大問 1 ～大問 3 については，次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は，マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは，消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の ア , イウ などには，特に指示のないかぎり，符号（－，±），数字（0～9），又は文字（a～e）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークしてください。

例 アイウ に $-7a$ と答えたいとき



なお，同一の問題文中に ア , イウ などが2度以上現れる場合，2度目以降は, ア , イウ のように細字で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。
例えば，$\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。
また，それ以上約分できない形で答えてください。
例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。また，必要に応じて，指定された桁まで ⓪ にマークをしてください。
例えば，キ . クケ に 2.9 と答えたいときは，2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

5　その他，係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

$\boxed{1}$

a を実数とする。x についての関数 $f(x) = 2x^2 + 2ax + a^2 - a$ について考える。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点Pの座標はP $\left(\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} a \ , \ \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} a^2 - a \right)$ であり，このグラフが x 軸と異なる2点で交わるための必要十分条件は $\boxed{\text{カ}} < a < \boxed{\text{キ}}$ である。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $y = f(x)$ の最小値を $m(a)$ とおき，a についての関数 $m(a)$ の最小値を以下のように考える。

まず，a の値によって場合分けすると

$\boxed{\text{ク}} < a$ のとき，　$m(a) = a^2 - \boxed{\text{ケ}}$ であり，

$\boxed{\text{コサ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ク}}$ のとき，　$m(a) = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} a^2 - \boxed{\text{セ}}$ であり，

$a < \boxed{\text{コサ}}$ のとき，　$m(a) = a^2 + \boxed{\text{ソ}}\, a + \boxed{\text{タ}}$ である。

よって，$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，$m(a)$ は最小値 $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとる。

(3) a の値が実数全体を変化するとき，$y = f(x)$ のグラフの頂点Pの軌跡の方程式は

$y = \boxed{\text{ニ}}\, x^2 + \boxed{\text{ヌ}}\, x$ である。

$\boxed{2}$

(1) 大人 2 人，子ども 6 人が 8 人用の円卓を囲んで座るとき，大人 2 人が隣り合わない並び方は $\boxed{\text{アイウエ}}$ 通りである。

(2) x についての方程式 $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$ の実数解は

$x = \boxed{\text{オ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ ， $-\boxed{\text{キ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3) $0° \leqq \theta < 90°$ とする。$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ ，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，θ は $\boxed{\text{セ}}$ を満たす。

$\boxed{\text{セ}}$ にあてはまるものを次の **1** ～ **4** のうちから一つ選べ。

1 $0° \leqq \theta < 30°$

2 $30° \leqq \theta < 45°$

3 $45° \leqq \theta < 60°$

4 $60° \leqq \theta < 90°$

(4) ある正の数 x の小数部分を b とすると，b のとりうる値の範囲は $\boxed{ソ} \leqq b < \boxed{タ}$ である。このとき，$x^2 + b^2 = 40$ が成り立つとすると，$x = \boxed{チ} + \sqrt{\boxed{ツテ}}$ である。

(5) 定数 a，b，c は $a + b + c = 3$，$ab + bc + ca = -2$，$abc = 1$ を満たすとする。

このとき，$a^2 + b^2 + c^2 = \boxed{トナ}$，$a^3 + b^3 + c^3 = \boxed{ニヌ}$ である。

(6) 次の $\boxed{ネ}$，$\boxed{ノ}$，$\boxed{ハ}$ にあてはまるものを下の **1** ～ **4** のうちから一つずつ選べ。

ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

・実数 r_1，r_2 について，r_1，r_2 がともに無理数であることは $r_1 + r_2$ が無理数であるための $\boxed{ネ}$。

・整数 a，b について，a，b がともに3の倍数であることは $a^2 + b^2$ が3の倍数であるための $\boxed{ノ}$。

・正の数 a，b，c について，3辺の長さが a，b，c である三角形が存在することは $a + b > c$ であるための $\boxed{ハ}$。

1　必要条件であるが十分条件ではない

2　十分条件であるが必要条件ではない

3　必要十分条件である

4　必要条件でも十分条件でもない

3

(1) 箱 A に赤球が 2 個，箱 B に白球が 2 個入っている。

「箱 A から球を 1 個取り出して箱 B に移したあと，箱 B から球を 1 個取り出して箱 A に移す」という試行を n 回繰り返すとする。

ただし，どの球が取り出される確率も同様に確からしいとする。

n 回目の試行の後で箱 A に入っている赤球が 0 個，1 個，2 個である事象をそれぞれ S_0, S_1, S_2 とする。

また n 回目の試行の後で事象 S_0, S_1, S_2 となる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とすると，

$p_n + q_n + r_n = \boxed{ア}$ が成り立つ。

また $r_{n+1} = \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}} q_n + \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} r_n$ であり，

$q_{n+1} = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}} p_n + \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} q_n + \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}} r_n$ である。

よって，r_n の漸化式を考えると

$r_1 = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ かつ $r_{n+1} = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}} r_n + \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ より $r_n = \dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}} \left\{ 1 + \left(\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}} \right)^{n-1} \right\}$ と求まる。

(2) 一辺の長さが5の正四面体OABCがある。

またOAを2：3に内分する点をP，OBを1：4に内分する点をQ，OCを4：1に内分する点を

Rとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とおくとき，

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{5}\overrightarrow{a} + \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{5}\overrightarrow{b}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{5}\overrightarrow{a} + \dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{5}\overrightarrow{c}$

よって，三角形PQRの面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

$\boxed{4}$

(1) 関数 $f(x) = \cos x$ の導関数を定義に従って求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてもよい。

(2) 関数 $g(x) = x\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \right)$ は定義域内にただ1つだけ極大値を持つことを示せ。

(3) 曲線 $y = |x\cos x|$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。